ÁLGEBRA

Profesor
Ricardo Espino
Lizama

FUNCIONES IV

FUNCIÓN INVERSA
TRAZADO DE GRÁFICAS
FUNCIÓN POLINOMIAL

FUNCIÓN INVERSA

$Sean\ A, B\ dos\ conjuntos\ y\ f\ una\ \boldsymbol{función\ biyectiva}\ definida\ de\ A\ a\ B,$
$con\ regla\ de\ correspondencia\ y = f(x)\ es\ decir:$

$$\boxed{f: A \to B. \quad y = f(x)}$$

$entonces\ \boldsymbol{existe\ una\ función} \quad \boldsymbol{f^*: B \to A}, \qquad \boldsymbol{y = f^*(x)}$

$$tal\ que\ cumple\ que\ y = f(x) \leftrightarrow x = f^*(y)$$

$A\ esta\ función\ se\ le\ conoce\ como\ la\ \boldsymbol{función\ inversa\ de\ f}, y\ se\ denota\ como\ \boldsymbol{f^*} \quad \boldsymbol{o\ también} \quad \boldsymbol{f^{-1}}$

$Ejemplo: \quad Sea\ la\ función\ biyectiva\ f: [1;3[\to [3;7[\quad y = f(x) = 2x + 1$

$entonces\ podemos\ definir\ a\ una\ función\ f^*: [3;7[\to [1;3[\quad y = f^*(x)$

$$tal\ que\ cumple\ que\ y = f(x) = 2x + 1 \leftrightarrow x = f^*(y) = \frac{y-1}{2}$$

$$\boxed{f^*: [3;7[\to [1;3[\ y = f^*(x) = \frac{x-1}{2}}$$

Propiedades:

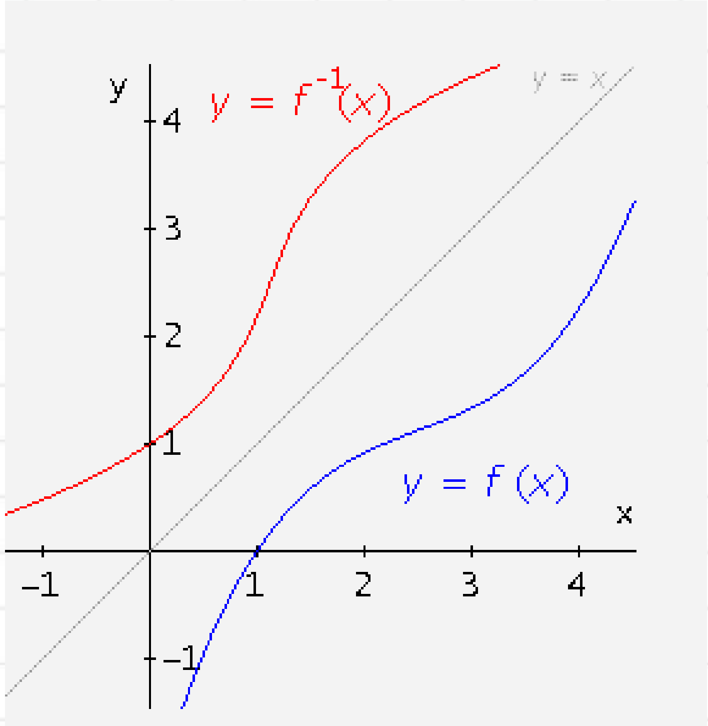
$$\boxed{Domf = Ranf^*}$$

$$\boxed{f^*(f(x)) = x \quad \forall x \in Domf}$$

$$\boxed{Ranf = Domf^*}$$

$$\boxed{f(f^*(x)) = x \quad \forall x \in Domf^*}$$

$Gráficamente\ \ f\ y\ f^*\ presentan\ gráficas\ simétricas\ con\ respecto\ a\ la\ función\ identidad\ f(x) = x$



$$\boxed{(f\ o\ g)^* = g^*\ o\ f^*}$$

De manera práctica, para hallar la regla de correspondencia de una función inversa

se intercambiarán las variables x e y y se despeja la variable y, ejemplo:

Se tiene la función real :

F(x) = (x - 2)(4 - x); x < 3

Determine F^{-1}, si existe

A) $F^{-1} = \{(x;\ 3 - \sqrt{1 - x}) \ /\ x < 1\}$

B) $F^{-1} = \{(x;\ 4 - \sqrt{2 - x}) \ /\ x < 2\}$

C) $F^{-1} = \{(x;\ 2 - \sqrt{1 - x}) \ /\ x < 1\}$

D) $F^{-1} = \{(x;\ 4 - \sqrt{3 - x}) \ /\ x < 3\}$

E) No admite inversa

$$\boldsymbol{y = F(x) = (x-2)(4-x) = -x^2 + 6x - 8 \quad con\ x < 3}$$

1. —Análisis de Inyectividad

$$F(a) = F(b) \to -a^2 + 6a - 8 = -b^2 + 6b - 8$$

$$\to 0 = a^2 - b^2 - 6a + 6b$$

$$\to 0 = (a-b)(a+b-6)$$

$$\boldsymbol{\to a = b \quad \vee \quad a + b = 6}$$

$pero\ ya\ que\ a, b < 3 \quad entonces\ a + b < 6\ y\ solo\ podría\ ser\ a = b$

F es inyectiva

$Ya\ que\ en\ este\ problema\ no\ se\ ha\ definido\ a\ F(x) \quad de\ la\ forma\ F\colon A \to B$

Bastará con la inyectividad para afirmar la existencia de f *

$Con\ lo\ cual\ faltaría\ únicamente\ calcular\ el\ \boldsymbol{Ranf}, el\ cual\ resulta\ ser\colon\ ]-\infty; \boldsymbol{1}[$

$\boldsymbol{y\ por\ lo\ tanto\ Domf^* =]-\infty; 1[\quad (recordar\ Ranf = Domf^*)}$

PITAGORAS ACADEMIA

con lo cual solo faltaría:

hallar la regla de correspondencia $\boldsymbol{y = F^*(x)}$ *la calcularemos de la siguiente forma*:

$y = -x^2 + 6x - 8$ $\quad$ *<u>intercambiamos x e y</u>* $\quad$ $\rightarrow x = -y^2 + 6y - 8$

<u>despejamos y</u>: $\quad$ $\rightarrow x - 1 = -(y-3)^2$

$\rightarrow 1 - x = (y-3)^2$

$\rightarrow y = 3 \pm \sqrt{1-x}$

pero ***ya que el rango de F^* debe ser*** $]-\infty; \mathbf{3}[$ *entonces*

$$\boxed{\rightarrow y = 3 - \sqrt{1-x}}$$

FINALMENTE: $\mathbf{f^*(x) = 3 - \sqrt{1-x}}, \quad \mathbf{x \in]-\infty; 1[}$

o también $\mathbf{F^* = \left\{\left(x; 3 - \sqrt{1-x}\right), x < 1\right\}}$

PITAGORAS ACADEMIA

Ejemplo 2:

Demuestre que la función irracional :

F = { (x; y) / y = $3+\sqrt{3-2x-x^2}$; $-1<x\leq 1$ }

es o no univalente. Luego, determinar su inversa F^{-1}, si es que existe

A) $F^{-1}(x) = -1-\sqrt{x^2-6x+5}$; $2\leq x<6$

B) $F^{-1}(x) = 1-\sqrt{-x^2+6x+5}$; $3\leq x<6$

C) $F^{-1}(x) = -1+\sqrt{-x^2+6x-5}$; $3\leq x<5$

D) $F^{-1}(x) = 1+\sqrt{x^2-6x-5}$; $2\leq x<5$

E) No es univalente en]-1; 1]

Calculamos el rango de F:

$$y = 3+\sqrt{4-(x+1)^2}$$

$$-1<x\leq 1 \qquad 0<x+1\leq 2$$

$$0<(x+1)^2\leq 4$$

$$0\leq 4-(x+1)^2<4$$

$$3\leq 3+\sqrt{4-(x+1)^2}<5$$

$$\boldsymbol{Ranf} = [3;5[\quad = \boldsymbol{DomF^*}$$

$1.-$Análisis de Inyectividad

$$F(a)=F(b)\rightarrow 3+\sqrt{3-2a-a^2}=3+\sqrt{3-2b-b^2}$$

$$\rightarrow -2a-a^2=-2b-b^2$$

$$\rightarrow 0=a^2-b^2+2a-2b$$

$$\rightarrow 0=(a-b)(a+b+2)$$

$$\rightarrow a=b \quad \vee \quad a+b=-2$$

ya que $a,b\in]-1;1]$ *entonces* $a+b>\ -2$ *y solo quedaría que* $a=b$

Por lo tanto F es inyectiva

Igualmente, en este caso bastará con la inyectividad para afirmar la existencia dede f^*

Cálculo de la regla de correspondencia $y=F^*(x)$

$$x=3+\sqrt{4-(y+1)^2}$$

$$x-3=\sqrt{4-(y+1)^2}$$

$$x^2-6x+9=4-(y+1)^2$$

$$(y+1)^2=-x^2+6x-5$$

$$y=-1+\sqrt{-x^2+6x-5}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{y=F^*(x)=-1+\sqrt{-x^2+6x-5}\,, \qquad 3\leq x<5}$$

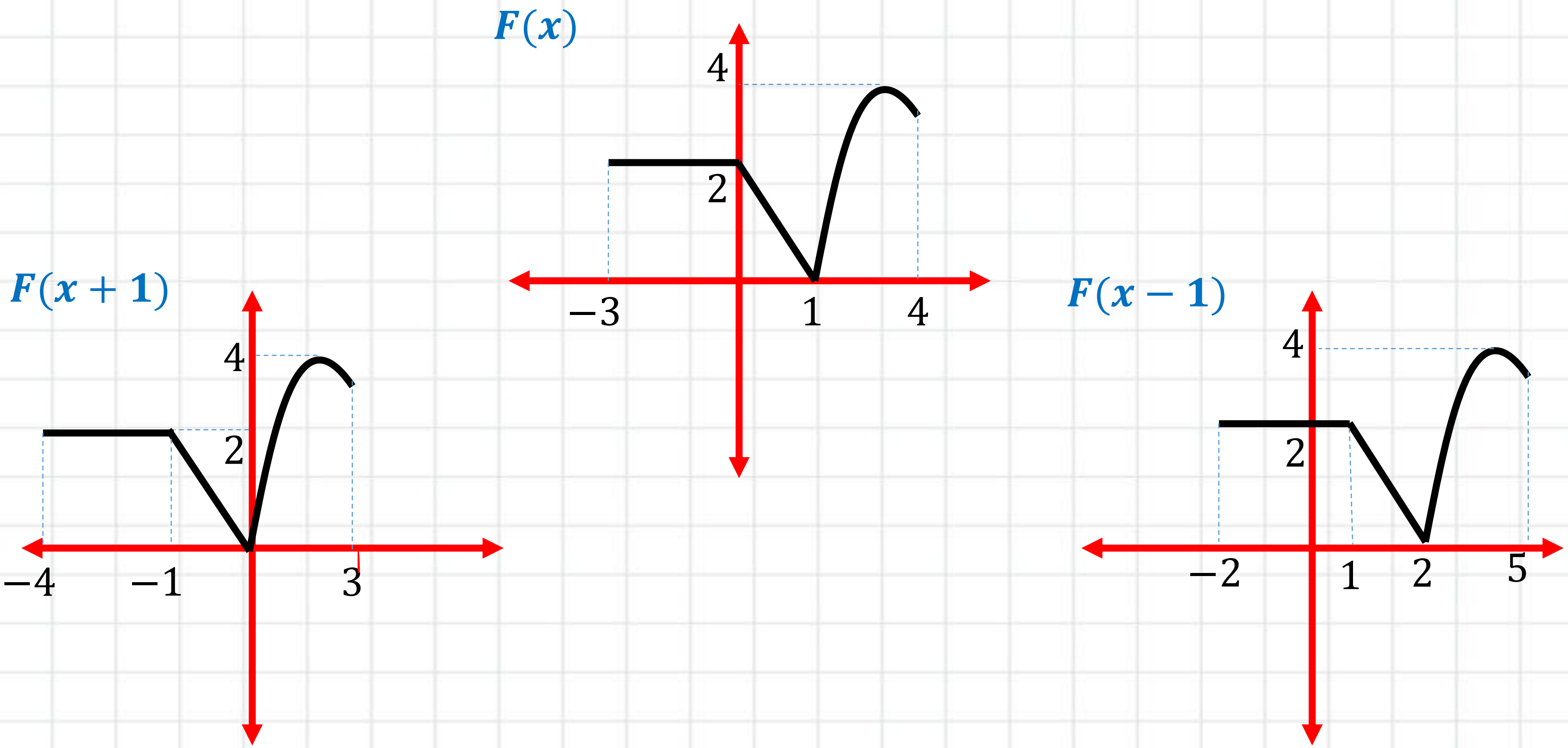
2. – TRAZADO DE GRÁFICAS

2.1. –DESPLAZAMIENTOS

2.1.1. –DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL

Sea $F(x)$ una función y a un número real positivo

La gráfica de $F(x-a)$ se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica de $F(x)$ ***a unidades a la DERECHA***
La gráfica de $F(x+a)$ se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica de $F(x)$ ***a unidades a la IZQUIERDA***

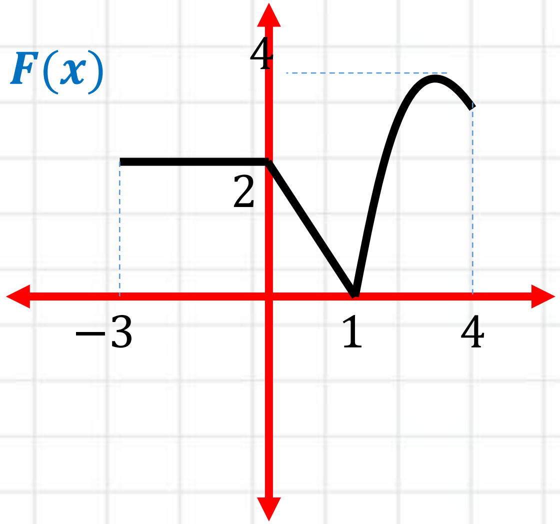


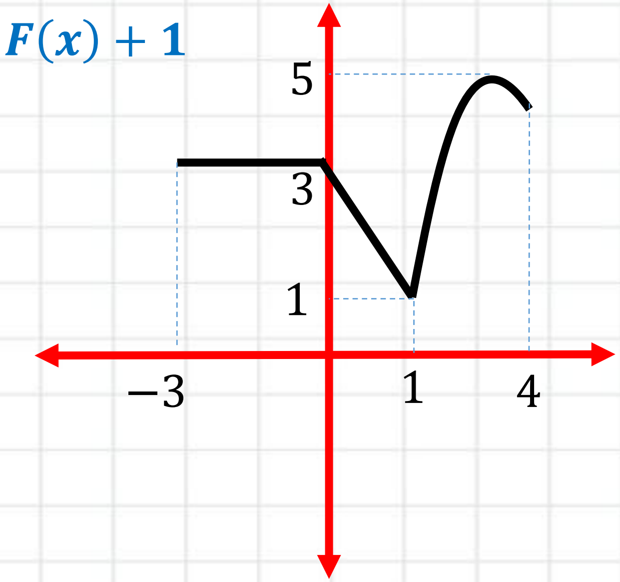
2.1.2. –DESPLAZAMIENTO VERTICAL

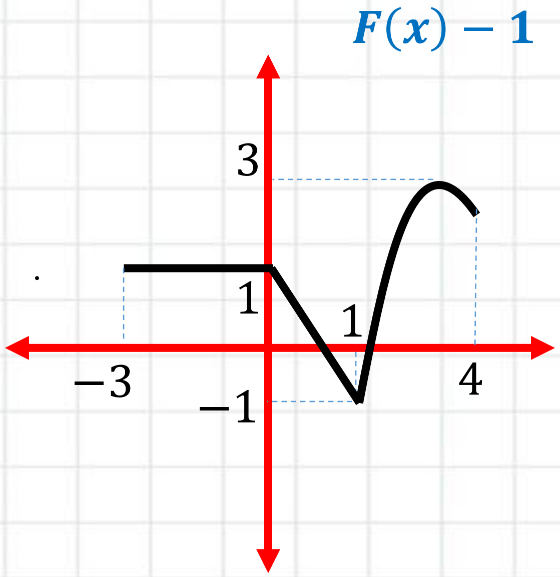
Sea $F(x)$ una función y a un número real positivo

La gráfica de $F(x)+a$ se obtiene desplazando verticalmente la gráfica de $F(x)$ ***a unidades hacia arriba***

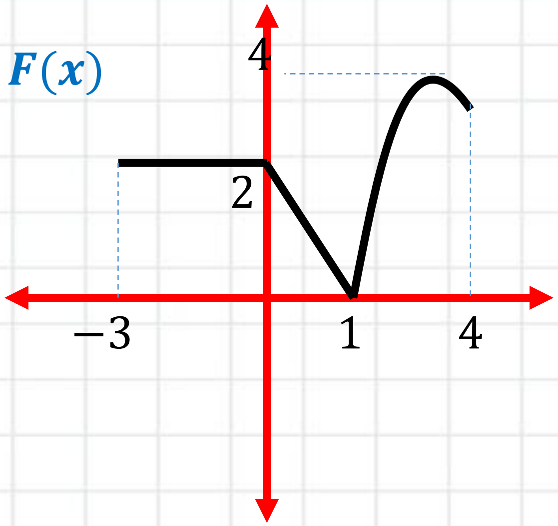
La gráfica de $F(x)-a$ se obtiene desplazando verticalmente la gráfica de $F(x)$ ***a unidades hacia abajo***

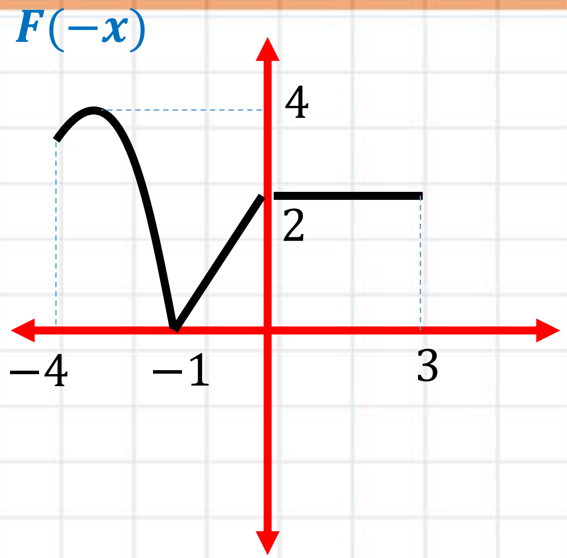




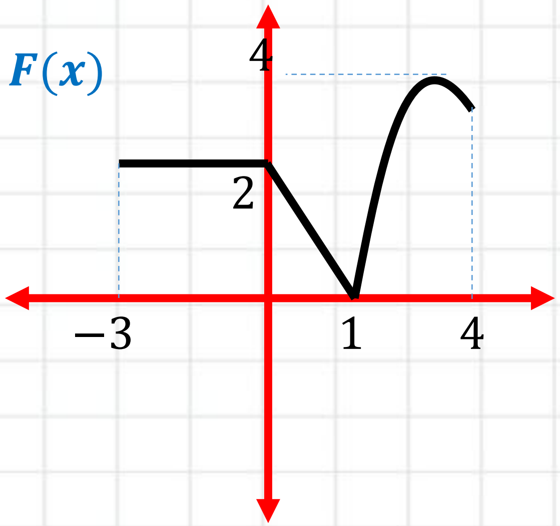


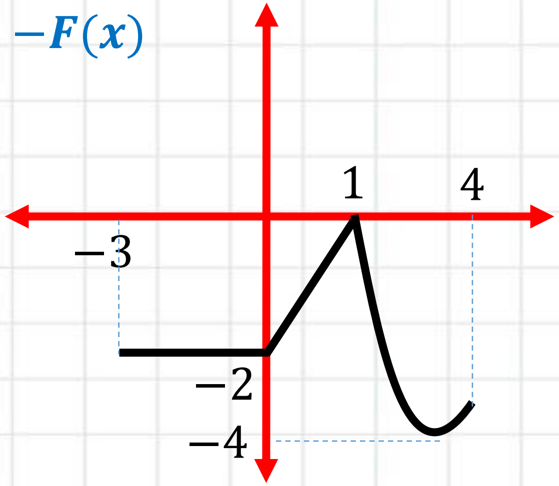
La gráfica de la función $\boldsymbol{F(-x)}$ es el resultado de **reflejar la función** $\boldsymbol{F(x)}$ **con respecto al eje** $\boldsymbol{Y}$





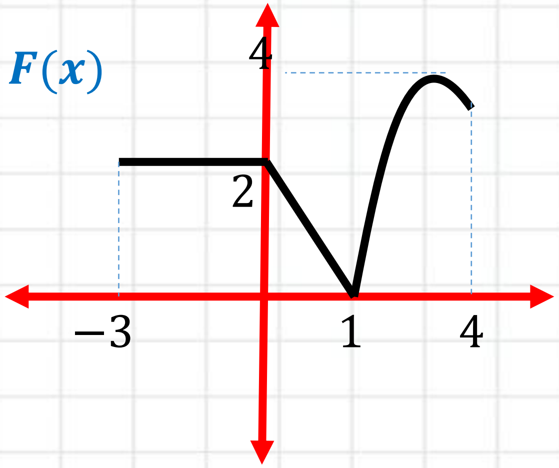
La gráfica de la función $\boldsymbol{-F(x)}$ es el resultado de **reflejar la función** $\boldsymbol{F(x)}$ **con respecto al eje** $\boldsymbol{X}$



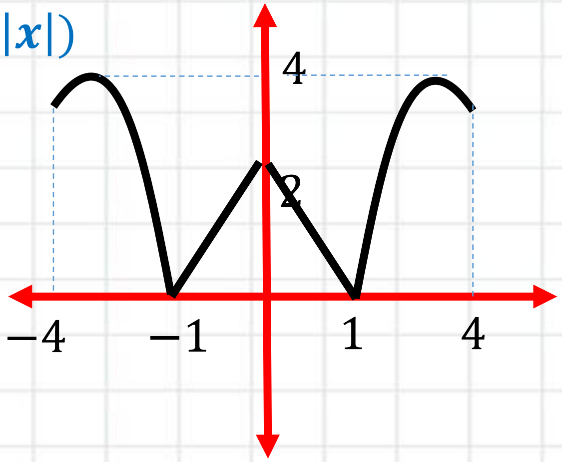


La gráfica de la función $F(|x|)$es el resultado de generar una simetría de la zona $(x \geq 0)$ de la gráfica con respecto al eje Y

$\boldsymbol{F(x)}$

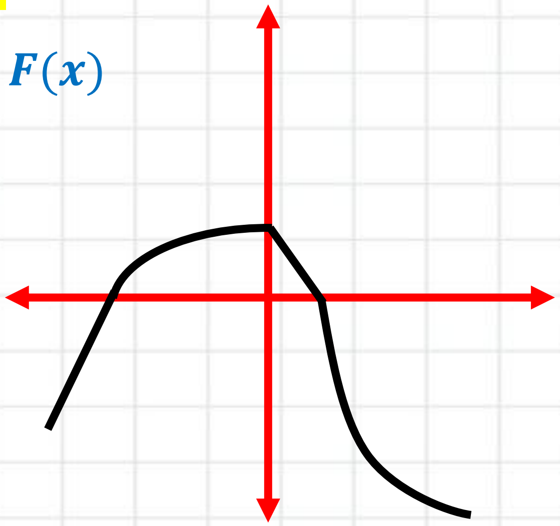


$\boldsymbol{F(|x|)}$

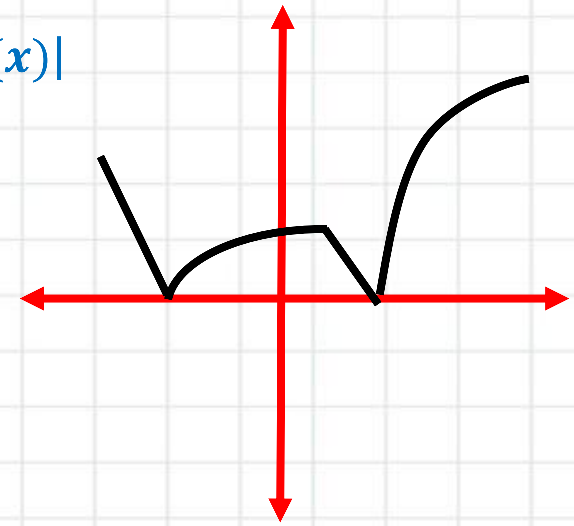


La gráfica de la función $|F(x)|$es el resultado de reflejar la zona $(y \leq 0)$ hacia la zona $(y \geq 0)$ de la gráfica con respecto al eje X

$\boldsymbol{F(x)}$



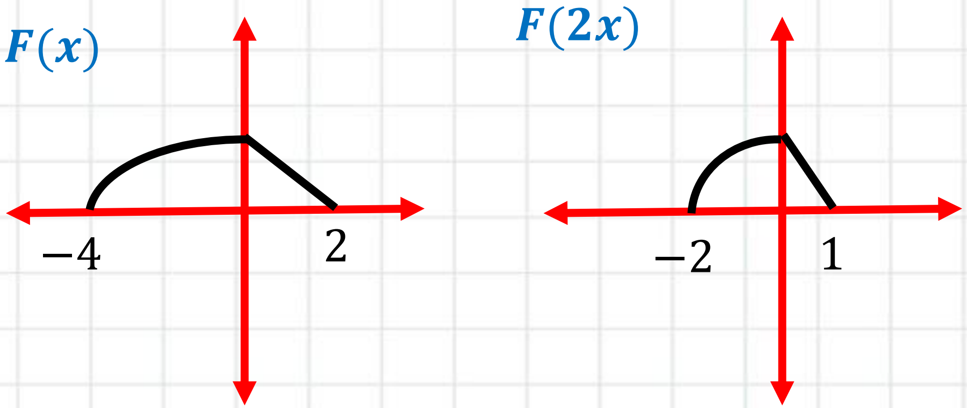
$\boldsymbol{|F(x)|}$



$2.4.1. - A\ lo\ largo\ del\ EJE\ X$

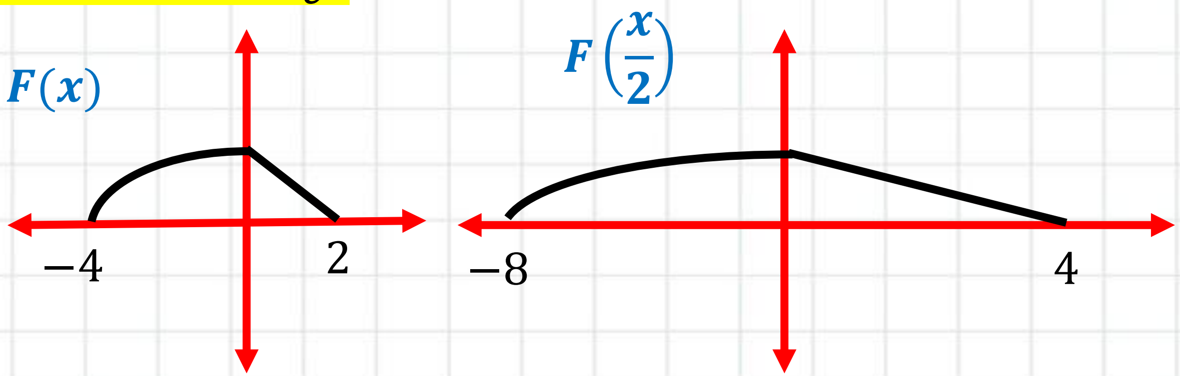
$Sea\ c \in]1; +\infty[$

$La\ gráfica\ de\ f(cx)\ se\ contrae\ horizontalmente\ en\ un\ factor\ de\ \frac{1}{c}$



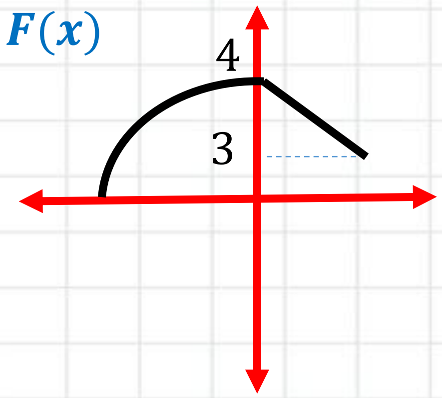
$Sea\ c \in]0; 1[$

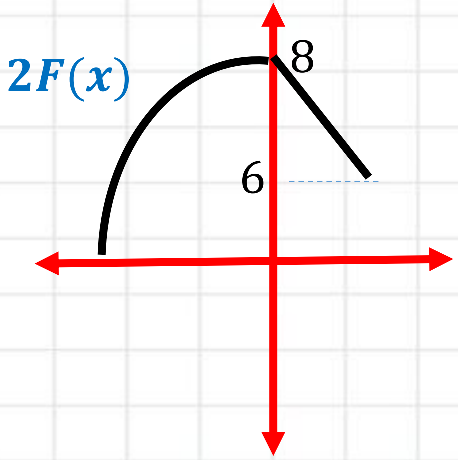
$La\ gráfica\ de\ f(cx)\ se\ alarga\ horizontalmente\ en\ un\ factor\ de\ \frac{1}{c}$



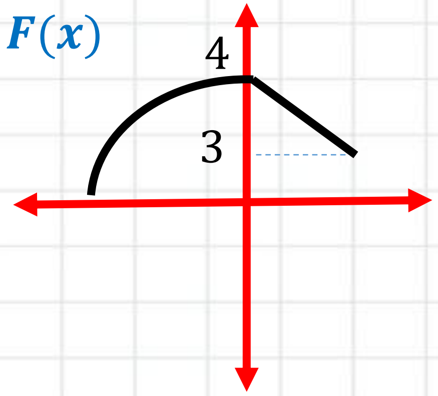
2.4.2. – *A lo largo del EJE Y*

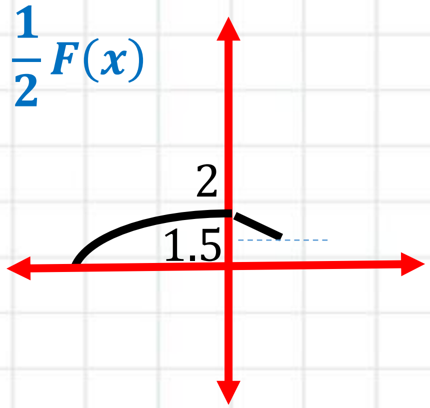
Sea $c \in]1; +\infty[$
La gráfica de $cf(x)$ *se alarga verticalemnte en un factor de* c





Sea $c \in]0; 1[$
La gráfica de $cf(x)$ *se contrae verticalmente en un factor de* c





OBSERVACIONES

1. –*Al efectuar deplazamientos horizontales y verticales es irrelevante el orden en el que se efectúan estos.*

2. –*Al ver presencias de signos negativos o valor absoluto se debe manejar con cuidado el orden, esto sobretodo al escoger el eje con el cual se elabora los reflejos o simetrías*

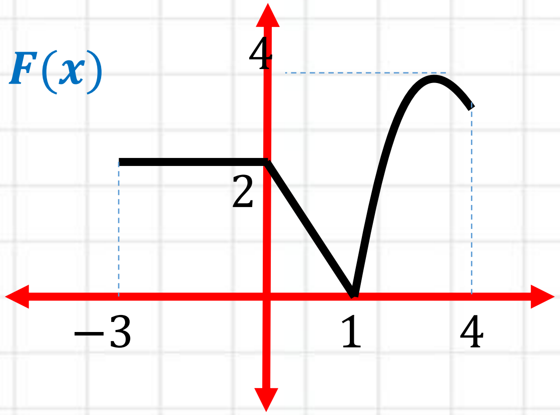
EJEMPLOS

Ejemplo:

En base a la gráfica de $F(x)$

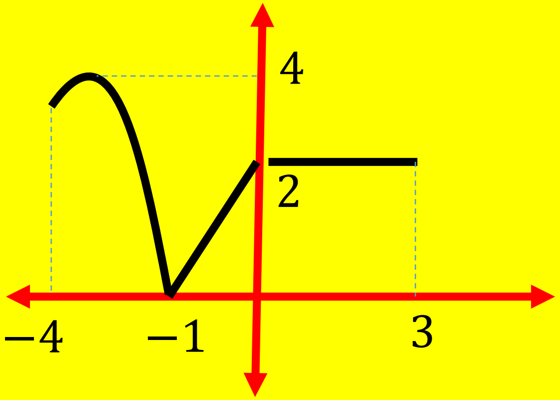
graficar $F(2-x)$

$\boldsymbol{F(x)}$

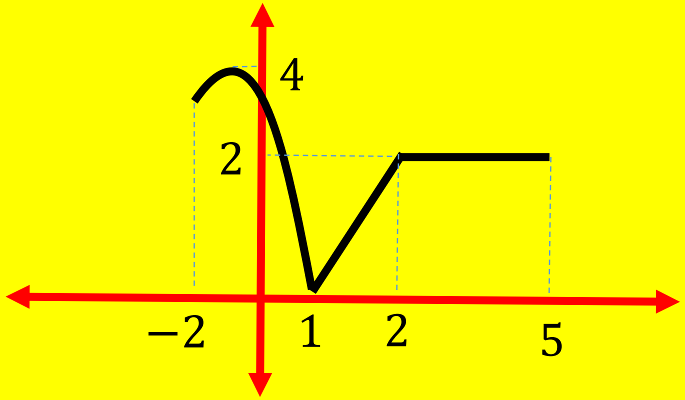


MÉTODO 1

PASO 1: $\boldsymbol{F(-x)}$

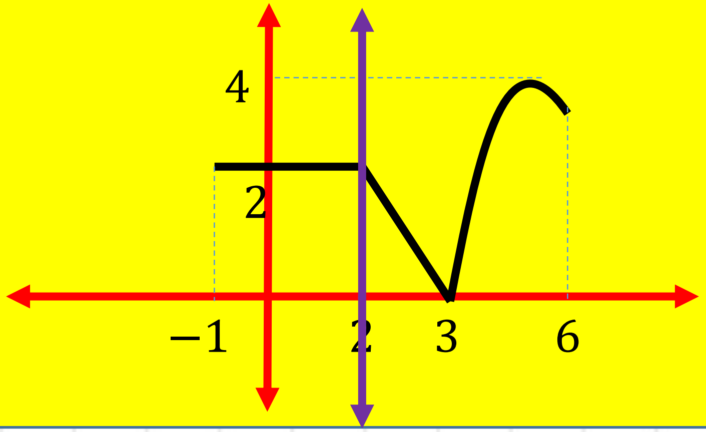


PASO 2: $\boldsymbol{F(-(x-2)) = F(2-x)}$

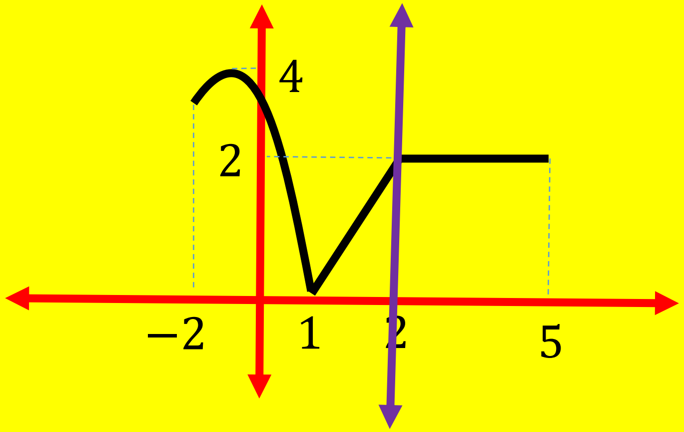


MÉTODO 2

PASO 1: $\boldsymbol{F(x-2)}$



PASO 2: $\boldsymbol{F(-(x-2)) = F(2-x)}$



Observemos que en el método 2, después de hacer el desplazamiento horizontal

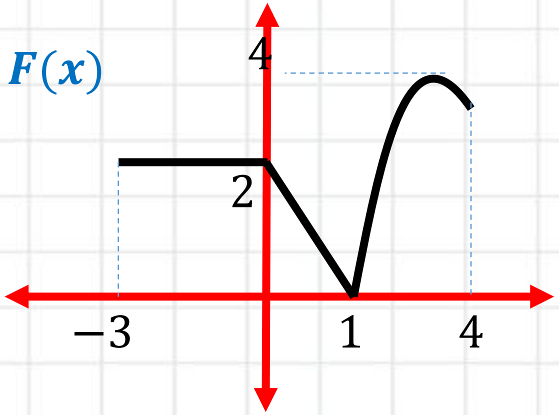
El reflejo al cambiar de signo se hace con respecto al ***eje vertical*** $\boldsymbol{X=2}$

Ejemplo:

En base a la gráfica de $F(x)$

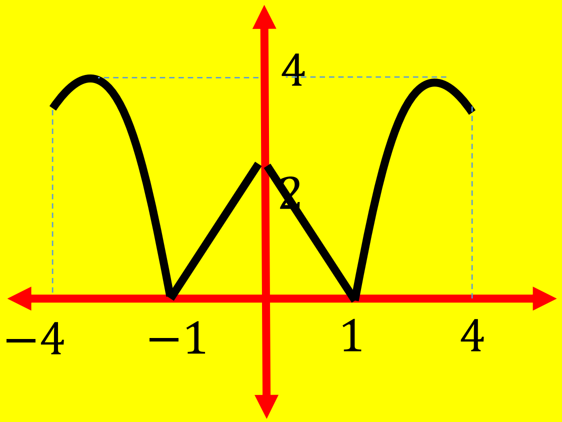
graficar $F(|x-2|)$

$\boldsymbol{F(x)}$

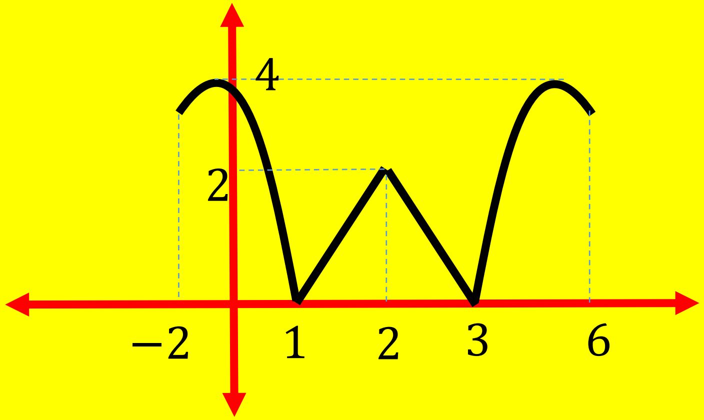


MÉTODO 1

PASO 1: $\boldsymbol{F(|x|)}$

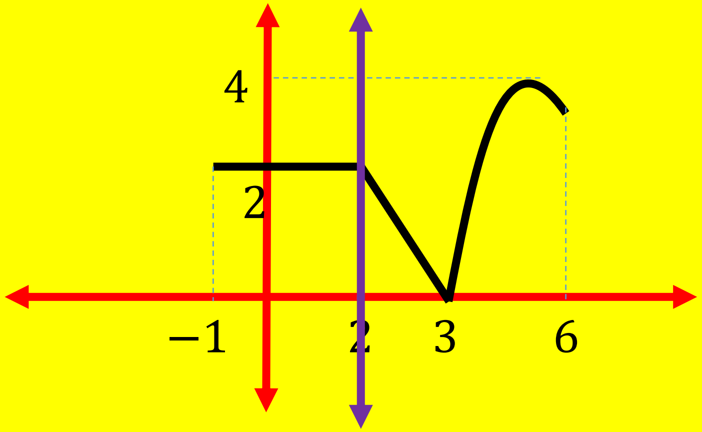


PASO 2: $\boldsymbol{F(|x-2|)}$

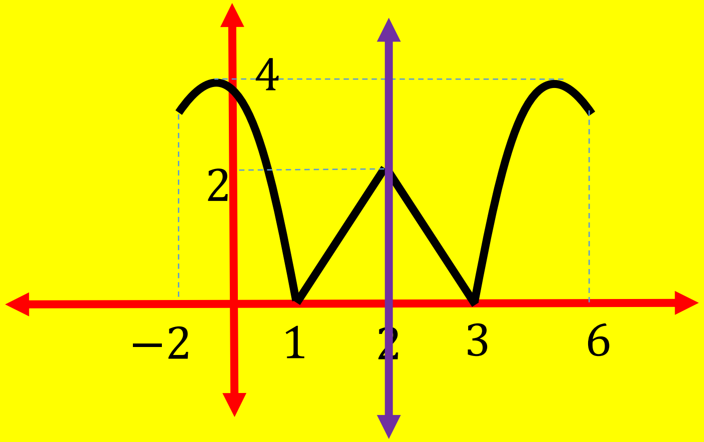


MÉTODO 2

PASO 1: $\boldsymbol{F(x-2)}$



PASO 2: $\boldsymbol{F(|x-2|)}$



Observemos que en el método 2, después de hacer el desplazamiento horizontal

La simetría al aplicar valor absoluto se genera con respecto al ***eje vertical*** $\boldsymbol{X=2}$

$3.-$*Funciones polinomiales*

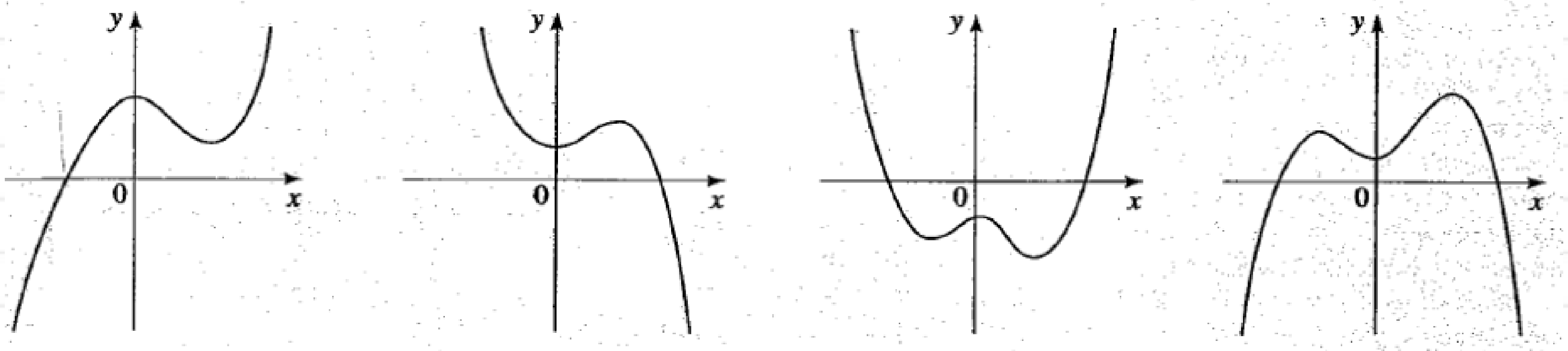
$$Sea\ f:\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ \ ,y=f(x)=a_ox^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

$\boldsymbol{n}$: ***grado de*** $\boldsymbol{f(x)}$ $\ (\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}\ \wedge\ \ \boldsymbol{n}\geq \mathbf{0})$ $\quad \boldsymbol{a_o\,;a_1\,;a_2;\ldots;a_n}$: ***coeficientes*** $\quad \boldsymbol{a_o\neq 0}$ (***coeficiente principal***)

Gráfica:

$y = P(x)$ tiene grado impar

$y = P(x)$ tiene grado par



El coeficiente principal es positivo

Comportamiento final

$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

El coeficiente principal es negativo

Comportamiento final

$y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$

El coeficiente principal es positivo

Comportamiento final

$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$

El coeficiente principal es negativo

Comportamiento final

$y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

Las ***intersecciones con el eje X*** *tendrán como abcisas a las* ***raíces reales de*** $\boldsymbol{f(x)}$

Estas intersecciones pueden ser:

TANGENTES: ***Si la raíz tiene multiplicidad par***

SECANTES: ***Si la raíz no tiene multiplicidad o es multiplicidad impar***

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

01.- Dada la función

$f : [a; +\infty > \to [3; +\infty >, f(x) = x^2 - 2x$

Siendo f una función biyectiva, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I.- $a = -1$

II.- $Ranf^* = [3; +\infty >$

III.- f^* es creciente

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FVV E) VFF

SOLUCIÓN

Primero graficamos a la función $\forall x \in \mathbb{R}$
y ya que f *es biyectiva entonces* $Ranf = [3; +\infty >$
y además también debe ser inyectiva, por lo tanto $\boldsymbol{a = 3}$

$\rightarrow \boldsymbol{Domf = [3; +\infty >}$

$\rightarrow$ ***f es creciente***

$\rightarrow$ ***y ya que f es creciente entonces f^* también es creciente.***

$\rightarrow \boldsymbol{Domf^* = [3; +\infty >}$ $\rightarrow \boldsymbol{Ranf^* = [3; +\infty >}$

CLAVE D

02. Hallar la función inversa de $f(x) = \sqrt{x} + x,\ x \geq 4$

A) $f^*(x) = \dfrac{2x-1-\sqrt{1+3x}}{2},\ x \geq 6$

B) $f^*(x) = \dfrac{2x-1+\sqrt{1+3x}}{2},\ x \geq 4$

C) $f^*(x) = \dfrac{2x+1-\sqrt{1+4x}}{2},\ x \geq 6$

D) $f^*(x) = \dfrac{2x+1+\sqrt{1+4x}}{2},\ x \leq 6$

E) $f^*(x) = \dfrac{2x+1-\sqrt{1+3x}}{2},\ x \geq 8$

SOLUCIÓN

Notemos que f es la suma de dos funciones crecientes y por lo tanto f también es una función creciente.

$\rightarrow$ ***f es inyectiva.*** $\quad \rightarrow$ ***existe f^****

Hallemos el Ranf (ya que Ranf = Domf*)

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad y\ ya\ que\ x \geq 4 \quad \rightarrow \sqrt{x} \geq 2 \quad \rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{25}{4} \rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 6$$

$\rightarrow$ ***Ranf*** $= [6; +\infty >$

$\rightarrow$ ***Domf**** $= [6; +\infty >$

Hallemos la regla de correspondecia de f^*

Intercambiamos x e y en la función original

$$x = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad despejando\ y: \quad y = \frac{2x + 1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{f^*(x) = \frac{2x + 1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}.\ \ x \geq 6}$$

CLAVE C

03.- Se define

$$f(x)=\frac{x-3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2};x\in<1;2>$$

Hallar $f^*(x)$

A) $f^*(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};\ x\in<0;+\infty>$

B) $f^*(x)=\frac{-2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};\ x\in<0;+\infty>$

C) $f^*(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};\ x\in<0;+\infty>$

D) $f^*(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{-1+\sqrt{x}};\ x\in<1;+\infty>$

E) $f^*(x)=\frac{3-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};\ x\in<1;+\infty>$

SOLUCIÓN

Notemos que al operar $f(x)$ *obtenemos:*

$$\boldsymbol{f(x)=\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^2}$$

Ahora demostremos que f *es inyectiva.*
$f(a)=f(b)\quad(donde\ a,b\in<1;2>)$

$$\rightarrow\left(1-\frac{1}{a-1}\right)^2=\left(1-\frac{1}{b-1}\right)^2$$

$$\rightarrow 1-\frac{1}{a-1}=1-\frac{1}{b-1}\quad\vee$$

$$1-\frac{1}{a-1}=-1+\frac{1}{b-1}$$

$$\rightarrow a=b\quad\vee\quad 2=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}$$

sin *embargo el último caso es imposible ya que* $a,b\in<1;2>$

$\rightarrow a=b\ \rightarrow$ ***f es inyectiva.*** $\rightarrow$ $\boldsymbol{f^*}$ ***existe***

Hallemos $Domf^*=Ranf$

$$1<x<2\quad\rightarrow 0<x-1<1$$

$$\rightarrow\frac{1}{x-1}>1\rightarrow-\frac{1}{x-1}<-1$$

$$\rightarrow 1-\frac{1}{x-1}<0$$

$$\rightarrow\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^2>0$$

$\rightarrow Ranf=<0;+\infty>$

$\rightarrow \boldsymbol{Domf^*=<0;+\infty>}$

Hallemos la regla de correspondencia

$$\boldsymbol{x=\left(1-\frac{1}{y-1}\right)^2}\quad\rightarrow\boldsymbol{1-\frac{1}{y-1}=\pm\sqrt{x}}$$

$$\boldsymbol{1-\frac{1}{y-1}=-\sqrt{x}}\quad(\boldsymbol{ya\ que\ y\in<1;2>})$$

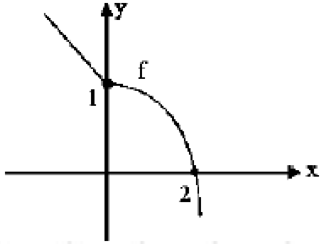
$$\rightarrow\boldsymbol{y=\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$\rightarrow\boldsymbol{f^*(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},x\in<0;+\infty>}$$

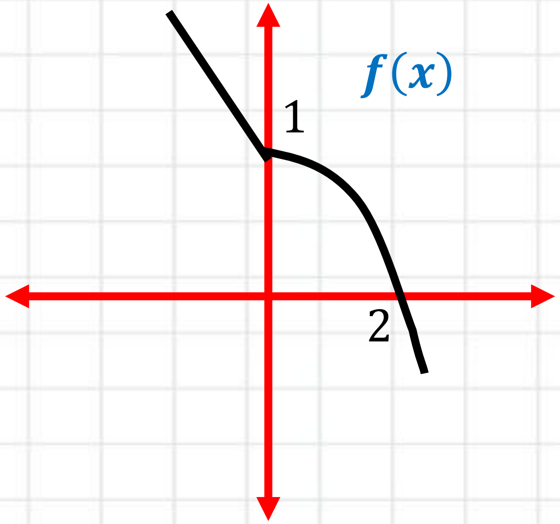
CLAVE A

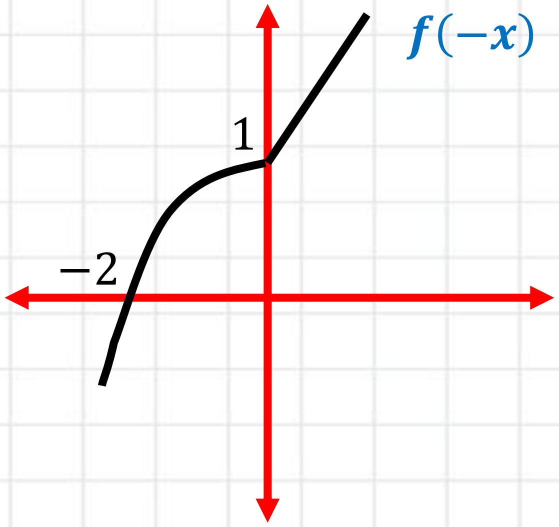
04.- La gráfica de la función f es como se muestra. Determine la gráfica de

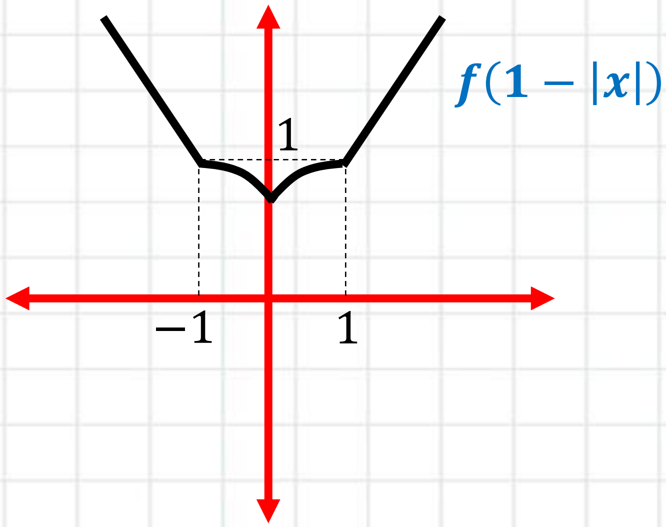
$$g(x) = f(1 - |x - 2|)$$



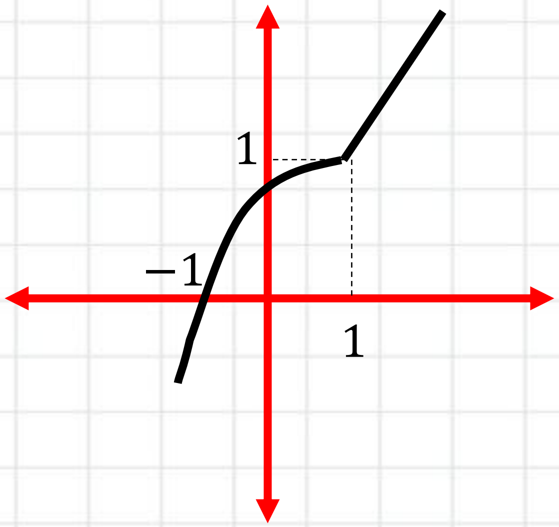
SOLUCIÓN



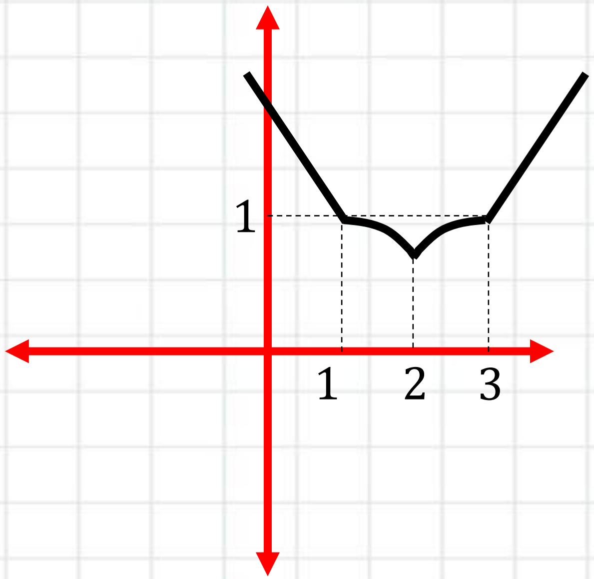




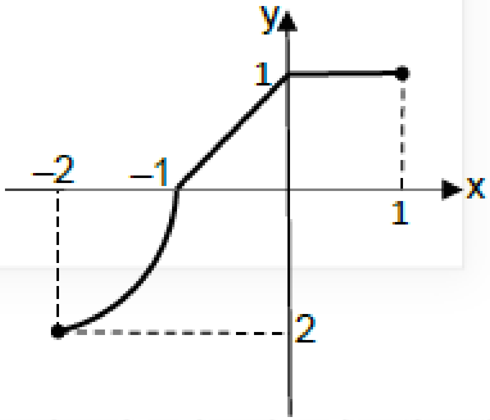
$f(-(x-1)) = f(1-x)$



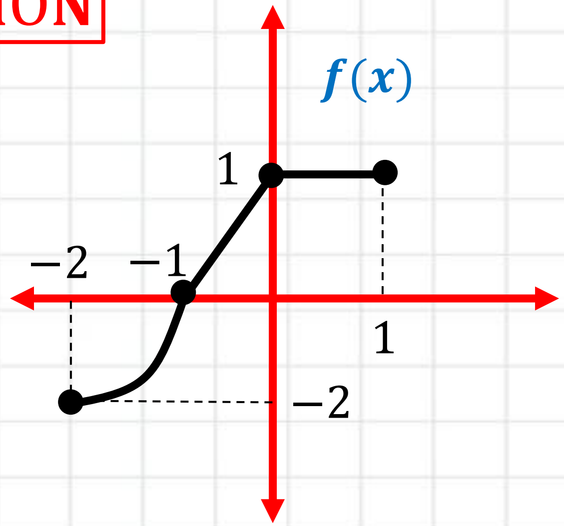
$f(1 - |x - 2|)$

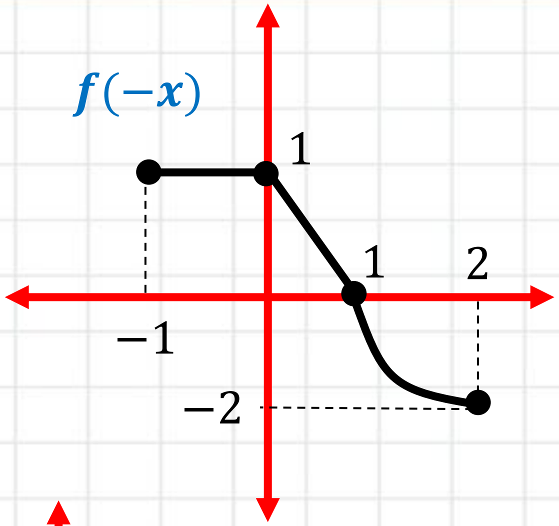


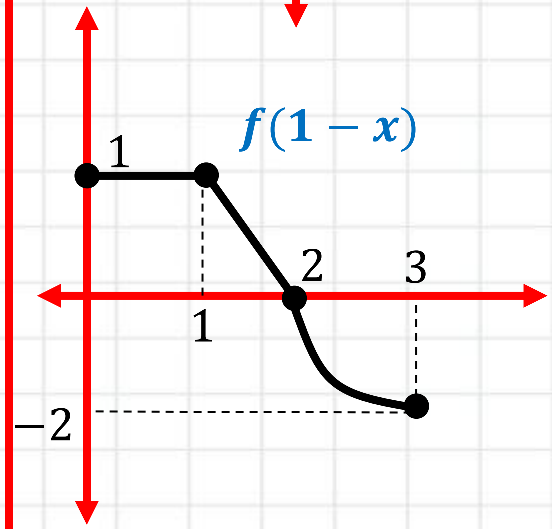
05.- Graficar $g(x) = 1 - |f(1 - x)|$, si la gráfica de f es:

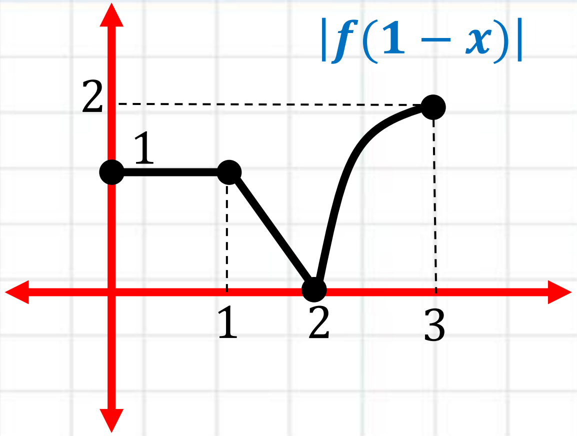


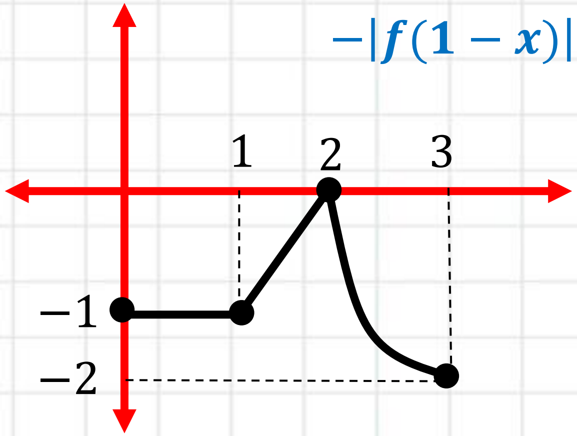
SOLUCIÓN

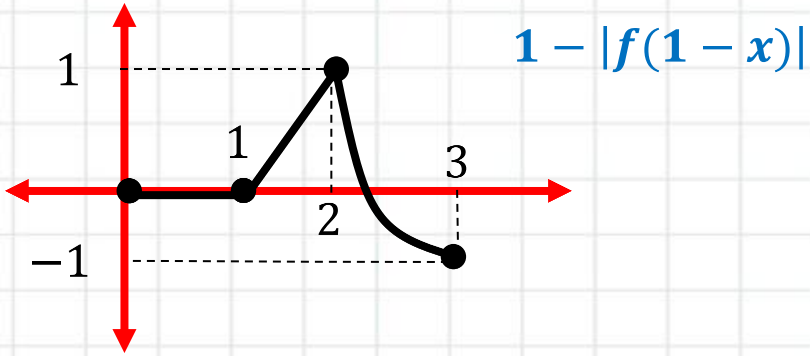












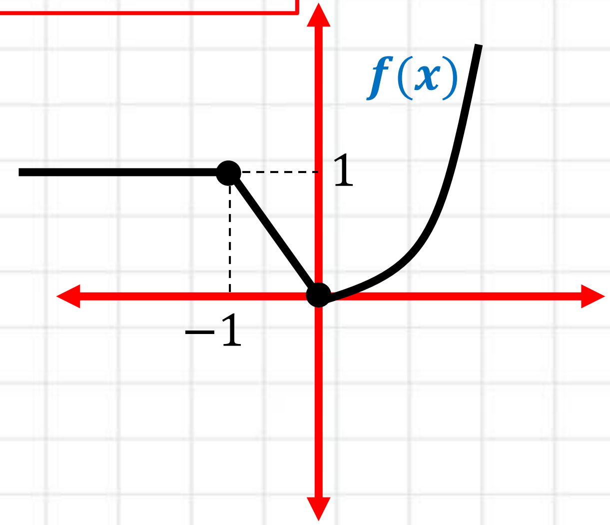
CAVE

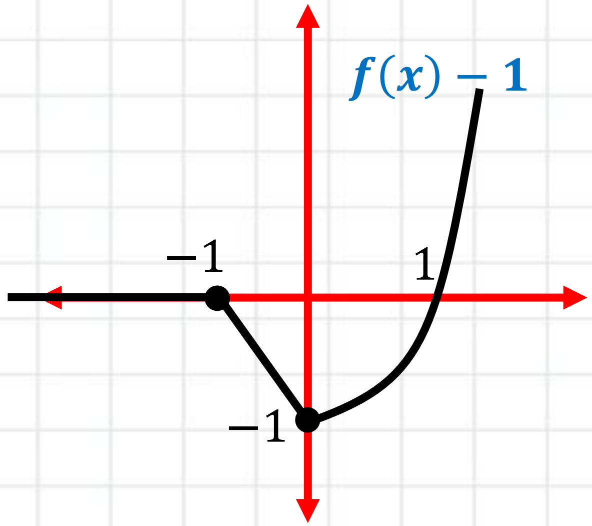
06.- Si $f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ -x, & -1\leq x\leq 0 \\ x^2 & x>0, \end{cases}$

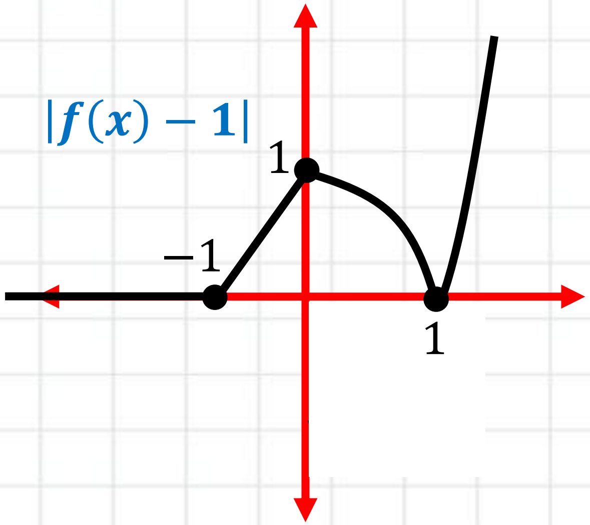
entonces la gráfica de

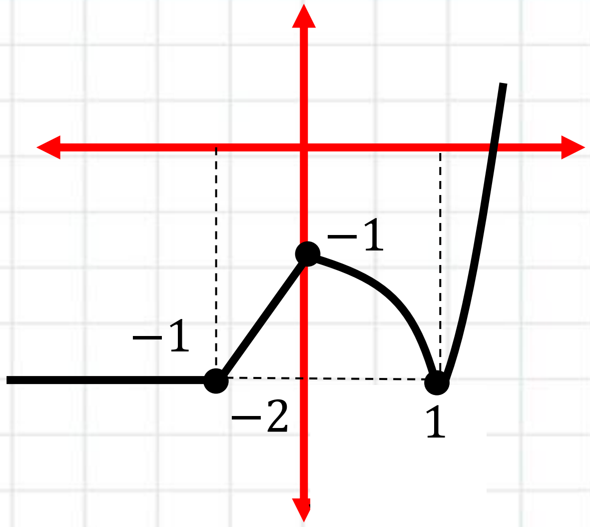
$y=||f(x)-1|-2|$ es:

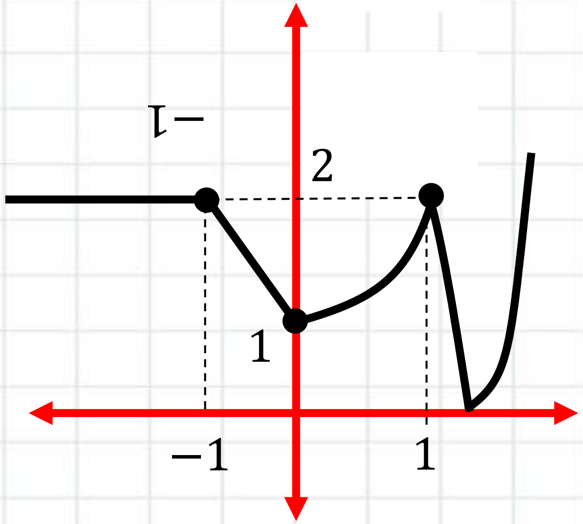
SOLUCIÓN









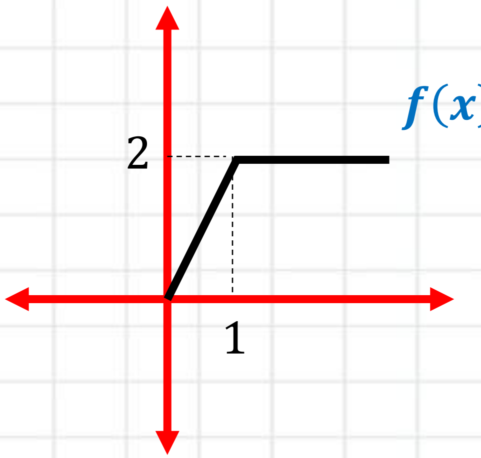


CLAVE E

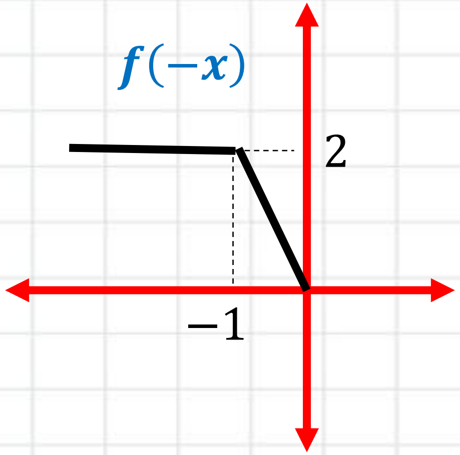
07.- Sea la función $f:[0;+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 2\ ;\ x\geq 1 \\ 2x\ ;\ 0\leq x<1 \end{cases}$, se define otra función g mediante $g(x)=|1-f(2-x)|$. Bosqueje la gráfica de g.

SOLUCIÓN

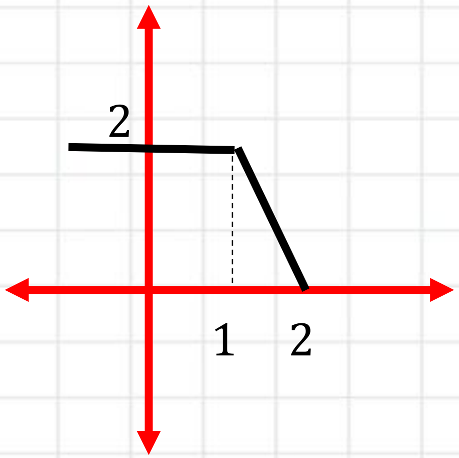
$f(x)$



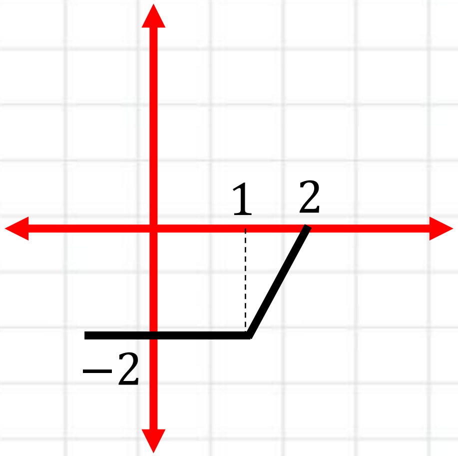
$f(-x)$



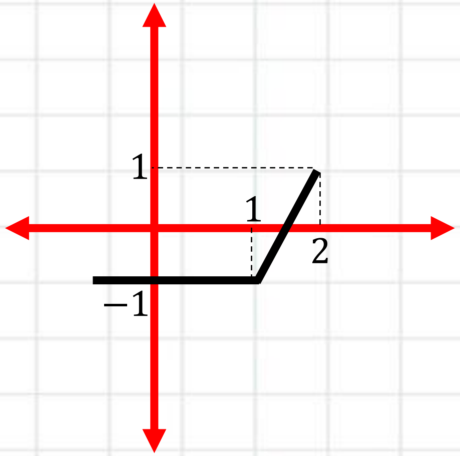
$f(-(x-2))=f(2-x)$



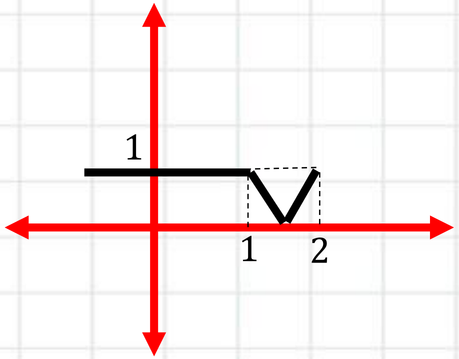
$-f(2-x)$



$1-f(2-x)$



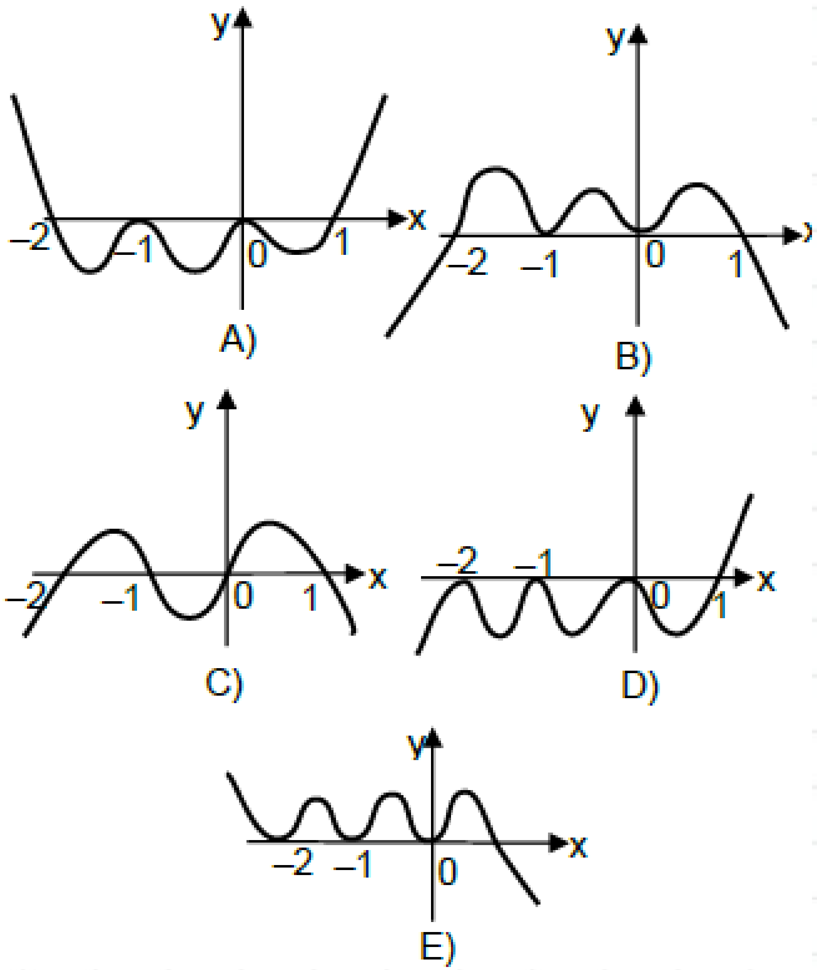
$|1-f(2-x)|$



CLAVE

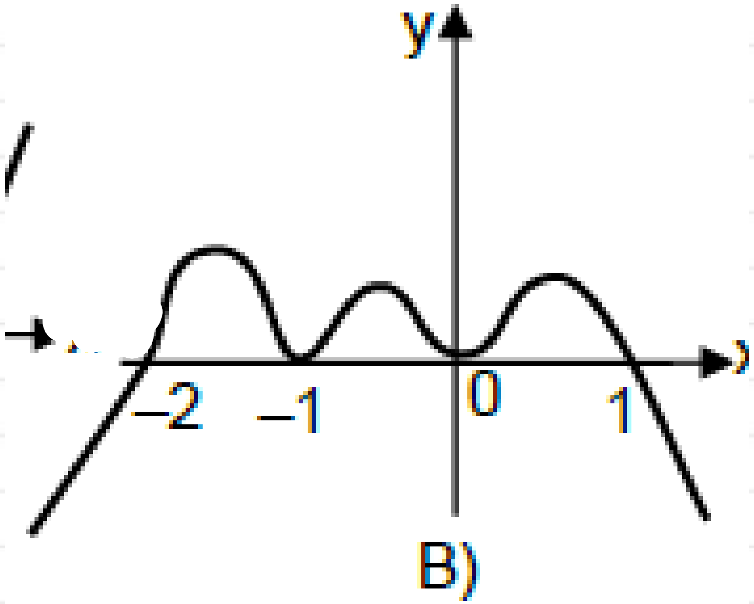
08.- Determinar aproximadamente la gráfica de:

$P(x) = (x + 1)^2 (-x - 2)x^2 (x - 1).$



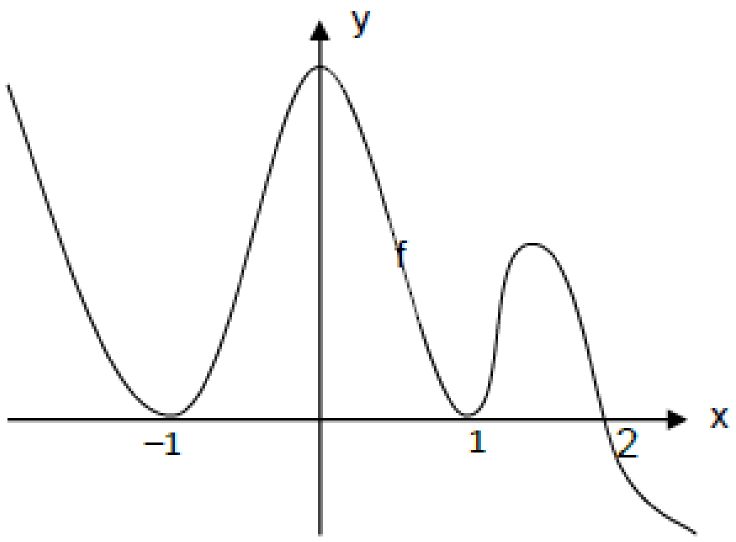
SOLUCIÓN

Notemos que f es una función polinomial de grado 6
y coeficiente principal negativo $(es\ -1)$
y que debe intersectar al eje x en: $-1, -2, 0, 1$
y además la intersección en $x = -1$ *y en* $x = 0$ *deberá ser tangente.*
y además la intersección en $x = -2$ *y en* $x = 1$ *deberá ser secante*
con esta información, la gráfica queda:



CLAVE B

09.- La gráfica de la función polinómica f(x), es la mostrada si el grado de f(x) es 5, determine el coeficiente independiente, si f(3) = – 640.



SOLUCIÓN

Ya que las intersecciones con el eje x en $x = -1$ *y en* $x = 1$ *son tangentes entonces:*

$$\boldsymbol{f(x) = a(x+1)^2(x-1)^2(x-2)}$$

y ya que $f(3) = -640$

$$\boldsymbol{f(3) = a(3+1)^2(3-1)^2(3-2) = -640} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = -10}$$

$$\boldsymbol{f(x) = -10(x+1)^2(x-1)^2(x-2)}$$

finalmente T. Independiente $= f(0) = \mathbf{20}$

CLAVE E

10.- Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son raíces de la ecuación $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 = 0$, tal que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, entonces indique la figura que mejor representa la gráfica de la función: $P(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x + 2)^3$

SOLUCIÓN

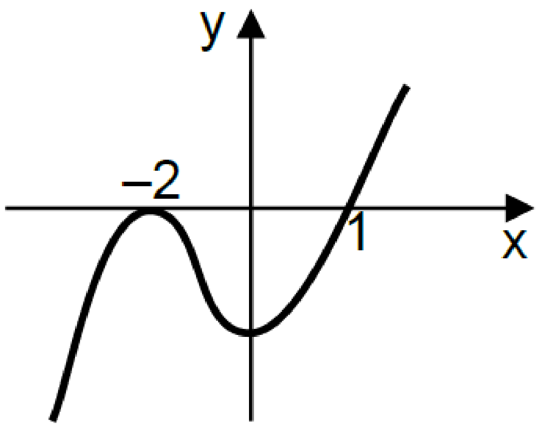
Al hallar las raíces de la ecuación polinomial obtenemos:

$$\boldsymbol{x_1 = -2, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 3}$$

$$reemplazando\ en\ P(x) = (x+2)(x-1)(x+2)^3$$

$$\rightarrow \boldsymbol{P(x) = (x-1)(x+2)^4}$$

El cual es un polinomio de grado 5 (*impar*) *y coeificnete principal positivo, además intersecta al eje* x *en* $x = 1$ (*secante*) *y en* $x = -2$ (*tangente*)



C)

CLAVE C

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS